

▼ 11. Másodrendű differenciálegyenlet numerikus megoldása

Ebben a fejezetben az

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$$

másodrendű differenciálegyenlet partikuláris megoldásait keressük ha adottak:

$$\text{a; kezdeti feltételek: } y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$$

$$\text{b; peremfeltételek: } y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$$

A kezdeti feltételekkel adott másodrendű differenciálegyenletek (un. Cauchy feladatok) megoldására a 10. fejezetben megismert módszerek alkalmazhatók. A peremfeltételekkel adott differenciálegyenlet megoldása már sokkal bonyolultabb, jelen jegyzet csak a legegyszerűbb megoldási módszerek ismertetésére vállalkozhat.

▼ 11. 1. Lineáris, másodrendű differenciálegyenlet egzakt megoldása Maple-lel

1. Példa A harmonikus rezgőmozgást okozó kvázistacionárius erőn kívül a valóságban mindig fellép a sebességgel ellentétes irányú súrlódási erő is. Keressük a csillapított rezgőmozgás kitérés-idő függvényét. A feladat differenciálegyenlete $m \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) = -k \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) - D y(t)$, ahol m a test tömege, k a súrlódási tényező, D a rugóállandó. Vizsgáljuk meg a feladat megoldását különböző kezdeti feltételek esetén, különböző m és D értékek mellett.

Megoldás

Vezessük be a $\frac{k}{m} = 2\beta$ és a $\frac{D}{m} = \omega^2$ jelöléseket. Így a differenciálegyenlet

> *restart; with(DEtools) : with(plots) :*

>
$$de := \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 2\beta \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + \omega^2 y(t) = 0 :$$

alakú. A differenciálegyenlet általános megoldása:

> *alt_mo := dsolve(de, y(t))*

$$alt_mo := y(t) = _C1 e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega^2})t} + _C2 e^{(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega^2})t}$$

Vizsgáljuk, mitől függ a kapott kitérés - idő függvény alakja. Keressük azt a partikuláris megoldást, amikor $y(0)=0$, illetve $y'(0) = v_{max}$. A derivált idő szerinti deriváltja a sebességet jelenti.

> *part_mo := dsolve({de, y(0) = 0, D(y)(0) = v_max}, y(t))*

$$part_mo := y(t) = \frac{1}{2} \frac{v_{max} e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega^2})t}}{\sqrt{\beta^2 - \omega^2}} - \frac{1}{2} \frac{v_{max} e^{(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega^2})t}}{\sqrt{\beta^2 - \omega^2}}$$

A kapott megoldás alakja nyilván attól függ, milyen a β és ω viszonya egymáshoz.

1. Legyen $\beta > \omega$. Ekkor a négyzetgyök alatti kifejezés pozitív, a súrlódás szerepe meghatározó a mozgás leírásakor. Matematikailag a differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének két valós gyöke van, két, független partikuláris megoldás lineáris kombinációjaként áll elő az általános

megoldás. Legyen $\beta = 8$, $\omega = 4$, $y(0) = 0$, $y'(0) = v_{max} = 4$. (A dimenzióktól most eltekintünk.)

> $de1 := \text{subs}(\{\beta = 8, \omega = 4\}, de); \text{part_mol1} := \text{dsolve}(\{de1, y(0) = 0, D(y)(0) = 4\}, y(t))$

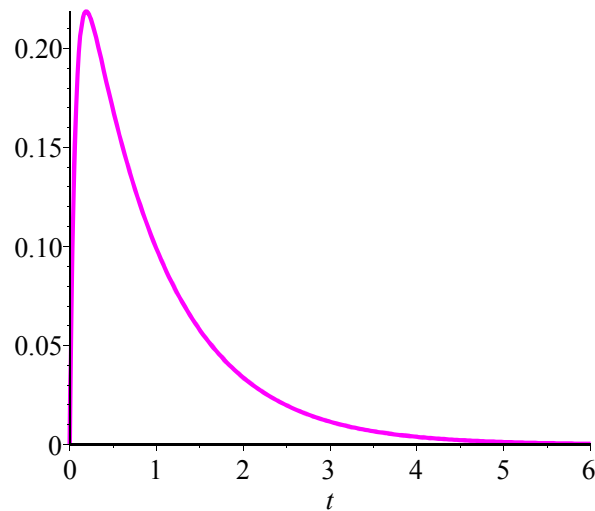
$$de1 := \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 16 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 16 y(t) = 0$$

$$\text{part_mol1} := y(t) = \frac{1}{6} \sqrt{3} e^{4(-2+\sqrt{3})t} - \frac{1}{6} \sqrt{3} e^{-4(2+\sqrt{3})t}$$

> $A := \text{plot}(\text{rhs}(\text{part_mol1}), t = 0..6, \text{thickness} = 2, \text{color} = \text{magenta}, \text{title} = A \text{ partikuláris megoldás})$:

A

A partikuláris megoldás



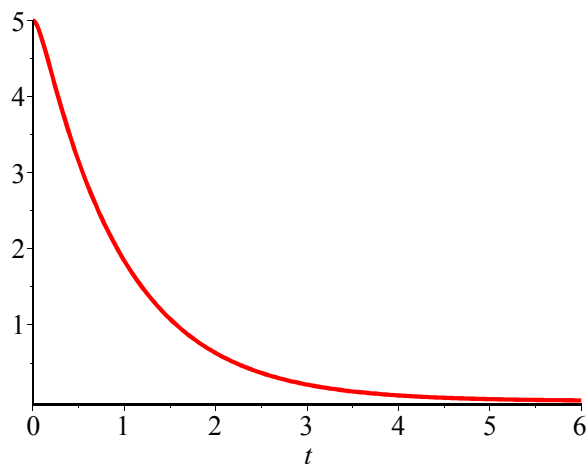
A mozgás nem periódikus, két exponenciális függvény összege. Ha a kezdeti feltételeket megváltoztatjuk úgy hogy a kezdeti kitérés ne legyen 0, viszont a kezdeti sebesség igen

> $\text{part_mol2} := \text{dsolve}(\{de1, y(0) = 5, D(y)(0) = 0\}, y(t))$:

> $B := \text{plot}(\text{rhs}(\text{part_mol2}), t = 0..6, \text{thickness} = 2, \text{color} = \text{red}, \text{title} = A \text{ partikuláris megoldás})$:

B

A partikuláris megoldás



A kitérés-idő függvény egy szigorúan monoton csökkenő függvény lesz.

2. Ha $\beta = \omega$. Ezt a fizikában **aperiódikus határesetnek** hívják. Ekkor a négyzetgyök alatti kifejezés 0, a karakterisztikus egyenletnek egy valós gyöke van, az ettől lineárisan független másik partikuláris megoldás ennek t -szereseként áll elő.

- > $de2 := \text{subs}(\{\beta = 4, \omega = 4\}, de)$
- > $part_mo21 := \text{dsolve}(\{de2, y(0) = 0, D(y)(0) = 4\}, y(t))$

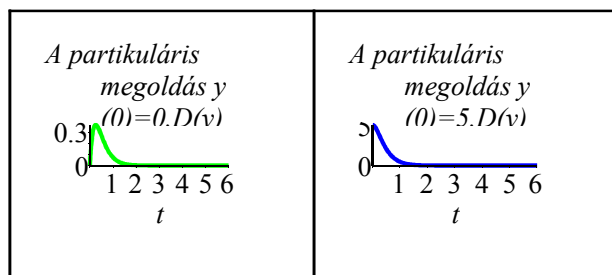
$$de2 := \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 8 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 16 y(t) = 0$$

$$part_mo21 := y(t) = 4 e^{-4t} t$$

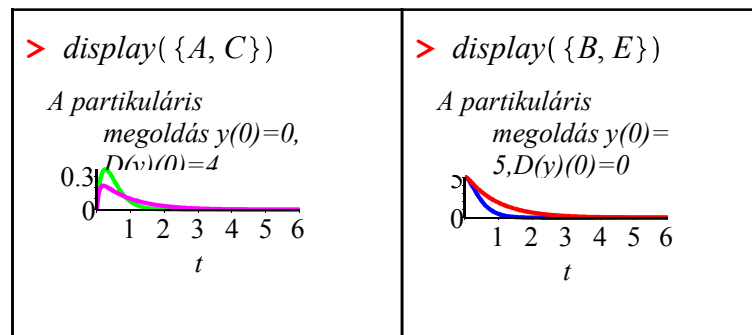
- > $C := \text{plot}(\text{rhs}(part_mo21), t = 0..6, \text{thickness} = 2, \text{color} = \text{green}, \text{title} = \text{"A partikuláris megoldás } y(0)=0, D(y)(0)=4 \text{"})$:
- > $part_mo22 := \text{dsolve}(\{de2, y(0) = 5, D(y)(0) = 0\}, y(t))$;
- > $E := \text{plot}(\text{rhs}(part_mo22), t = 0..6, \text{thickness} = 2, \text{color} = \text{blue}, \text{title} = \text{"A partikuláris megoldás } y(0)=5, D(y)(0)=0 \text{"})$:

$$part_mo22 := y(t) = 5 e^{-4t} + 20 e^{-4t} t$$

- > $\text{Matrix}(1, 2, [C, E]) : \text{plots}[\text{display}](\%)$



Nézzük meg együtt, az azonos kezdeti feltételnek megfelelő partikuláris megoldásokat.



3. Ha $\beta < \omega$, a csillapítás kicsi. Ekkor a megoldásban szereplő négyzetgyökös kifejezés negatív, vagyis a karakterisztikus egyenletnek nincs valós gyöke.

- > $de3 := \text{subs}(\{\beta = 2, \omega = 4\}, de)$
- > $part_mo31 := \text{dsolve}(\{de3, y(0) = 0, D(y)(0) = 4\}, y(t))$

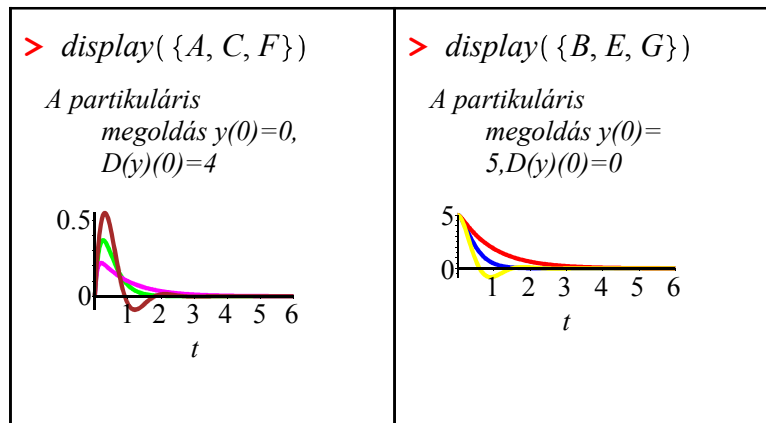
$$de3 := \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 4 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 16 y(t) = 0$$

$$part_mo31 := y(t) = \frac{2}{3} \sqrt{3} e^{-2t} \sin(2t\sqrt{3})$$

- > $F := \text{plot}(\text{rhs}(part_mo31), t = 0..6, \text{thickness} = 2, \text{color} = \text{brown}, \text{title} = \text{"A partikuláris megoldás"})$:
- > $part_mo32 := \text{dsolve}(\{de3, y(0) = 5, D(y)(0) = 0\}, y(t))$

$$part_mo32 := y(t) = \frac{5}{3} \sqrt{3} e^{-2t} \sin(2t\sqrt{3}) + 5 e^{-2t} \cos(2t\sqrt{3})$$

> $G := \text{plot}(\text{rhs}(part_mo32), t=0..6, \text{thickness}=2, \text{color}=\text{yellow}, \text{title} = A \text{ partikuláris megoldás}) :$



4. Igaz-e, hogy $\beta=0$ eset a harmonikus rezgőmozgásnál megismert tiszta szinusz függvényt adja?

> $de4 := \text{subs}(\{\beta=0, \omega=4\}, de)$

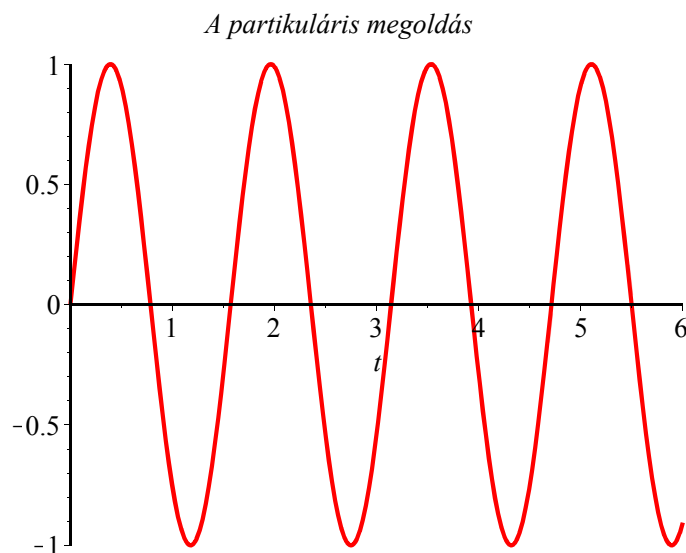
> $part_mo4 := \text{dsolve}(\{de4, y(0)=0, D(y)(0)=4\}, y(t))$

$$de4 := \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 16 y(t) = 0$$

$$part_mo4 := y(t) = \sin(4t)$$

> $H := \text{plot}(\text{rhs}(part_mo4), t=0..6, \text{thickness}=2, \text{color}=\text{red}, \text{title} = A \text{ partikuláris megoldás}) :$

H



5. Hogyan változik a megoldás, ha a rendszerre **kényszererő** is hat?

> $de5 := \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 16 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 16 y(t) = \sin(t) + e^{-t} :$

> $alt_mo5 := \text{dsolve}(de5, y(t))$

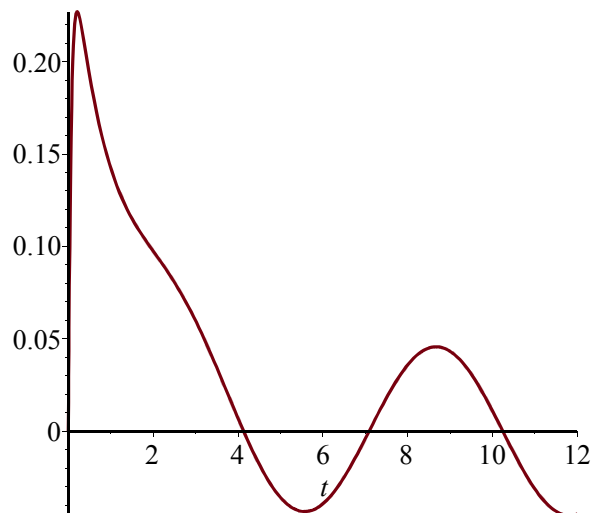
$$alt_mo5 := y(t) = e^{4(-2+\sqrt{3})t} _C2 + e^{-4(2+\sqrt{3})t} _C1 - \frac{16}{481} \left(-\frac{481}{16} + \cos(t) \right)$$

$$-\frac{15}{16} \sin(t) \Big) e^t \Big) e^{-t}$$

> `part_mo5 := dsolve( {de5, y(0) = 0, D(y)(0) = 4}, y(t) )`

$$part_mo5 := y(t) = e^{4(-2 + \sqrt{3})t} \left(-\frac{665}{5772} \sqrt{3} - \frac{465}{962} \right) + e^{-4(2 + \sqrt{3})t} \left(-\frac{465}{962} + \frac{665}{5772} \sqrt{3} \right) \\ - \frac{16}{481} \left(-\frac{481}{16} + \left(\cos(t) - \frac{15}{16} \sin(t) \right) e^t \right) e^{-t}$$

> `plot(rhs(part_mo5), t=0..12)`



▼ 11. 2. Kezdetiérték feladat megoldása Euler módszerével

A másodrendű kezdetiérték problémák a Newton-féle mozgásegyenletek megoldása miatt alapvető fontosságúak. Keressük az $y(t)$ hely-idő függvényt, miközben a mozgást végző testre különböző erők hatnak.

$$y''(t) = f(y'(t), y(t), t), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = v_0$$

A differenciálegyenletet visszavezetjük egy elsőrendű, 2 egyenletből álló differenciálegyenlet rendszerre.

Jelölések:

$$v(t) = y'(t), \\ v'(t) = f(y(t), v(t), t),$$

A kezdeti feltételek:

$$y(t_0) = y_0, \quad v(t_0) = v_0$$

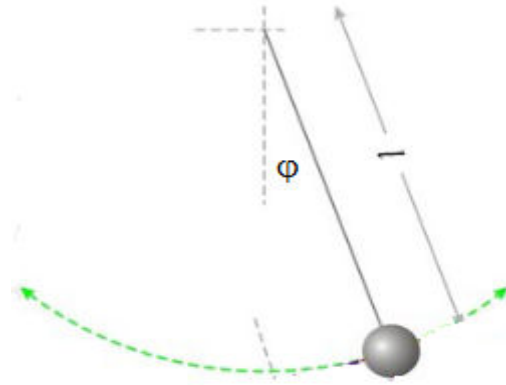
Majd az Euler módszernél megismertek szerint:

$$y(t_0 + h) \approx y(t_0) + h v(t_0) \\ v(t_0 + h) \approx v(t_0) + h f(y(t_0), v(t_0), t_0)$$

Majd ezt az eljárást folytatjuk a megadott lépésszámig.

2. Példa Írjuk le az l hosszúságú, m tömegű fonálinga mozgás-idő függvényét, ha

- a; a fonál nyújthatatlan, maximális kitérése $< 5^\circ$
 b; a fonál nyújthatatlan, a mozgás vízszintes helyzetből indul.



Megoldás a;

Nyújthatatlan, kis kitérésű fonálinga esetén a fonál vízszintes irányú kitérése közelítőleg a kitérés szögének l -szerese. $x = l \cdot \sin(\varphi)$, $s = l \cdot \varphi$, $\sin(\varphi) \approx \varphi$. Ekkor a mozgásegyenlet másodrendű, lineáris, homogén differenciálegyenletre egyszerűsödik. A kezdeti feltételek legyenek

$$x(0) = 5 \frac{\pi}{180} l, \quad (\varphi = 5^\circ), \quad v(0) = 0 \frac{m}{s}, \quad g \approx 10 \frac{m}{s^2}, \quad l = 1 \text{ m}.$$

> *restart; with(DETools) : with(plots) :*

>
$$de := \frac{d^2}{dt^2} x(t) = - \frac{g x(t)}{l} :$$

>
$$part_mo := dsolve\left(\left\{de, D(x)(0) = 0, x(0) = \frac{l \cdot 5 \pi}{180}\right\}, x(t)\right)$$

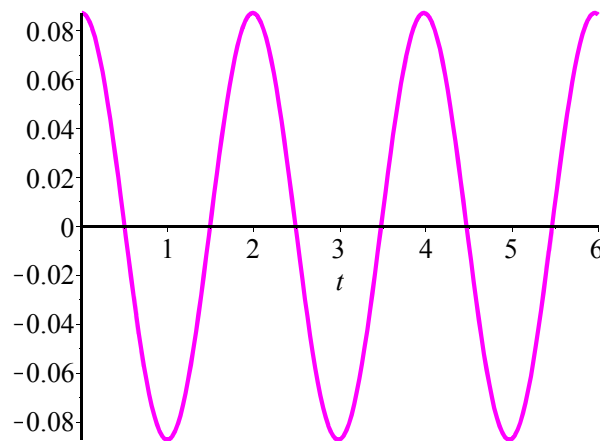
$$part_mo := x(t) = \frac{1}{36} l \pi \cos\left(\frac{\sqrt{g} t}{\sqrt{l}}\right)$$

> $kiteres := subs(\{g = 10, l = 1\}, part_mo)$

$$kiteres := x(t) = \frac{1}{36} \pi \cos(\sqrt{10} t)$$

> $A := plot(rhs(kiteres), t = 0..6, thickness = 2, color = magenta, title = \text{Ingamozgás kitérés} \\ \text{— idő függvénye kis kitérés esetén}) : A$

Ingamozgás kitérés – idő függvénye kis kitérés esetén



A mozgás a harmonikus rezgőmozgásnak felel meg.

b;

Nyújthatatlan, nagy kitérésű fonálinga esetén a szöggyorsulás a szög szinuszával arányos, a newtoni mozgásegyenlet

> *restart; with(plots) : with(DETools) :*

>
$$de := \frac{d^2}{dt^2} \varphi(t) = -10 \sin(\varphi(t)) :$$

alakú.

> *partmegold := dsolve* $\left(\left\{ de, \varphi(0) = \frac{\pi}{2}, D(\varphi)(0) = 0 \right\}, \varphi(t) \right)$

partmegold := $\varphi(t) = \text{RootOf} \left(\int_0^{-Z} \left(-\frac{1}{20} \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{\cos(_a)}} \right) d_a + t + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{10} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\cos(_a)}} d_a \right),$

$\varphi(t) = \text{RootOf} \left(\int_0^{-Z} \frac{1}{20} \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{\cos(_a)}} d_a + t + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(-\frac{1}{10} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\cos(_a)}} \right) d_a \right)$

A feladat csak numerikusan oldható meg.

b1; Megoldás Euler módszerrel

Írjunk ciklust, a következő bemenő adatokkal, majd ábrázoljuk a szögkitér-idő grafikont!

> *t[0] := 0 : $\varphi[0] := \text{evalf} \left(\frac{\pi}{2} \right) : \omega[0] := 0 : h := 0.05 : n := 40 :$*

> **for** *i* **to** *n* **do**

t[i] := t[i-1] + h;

$\varphi[i] := \text{evalf}(\varphi[i-1] + h \omega[i-1]);$

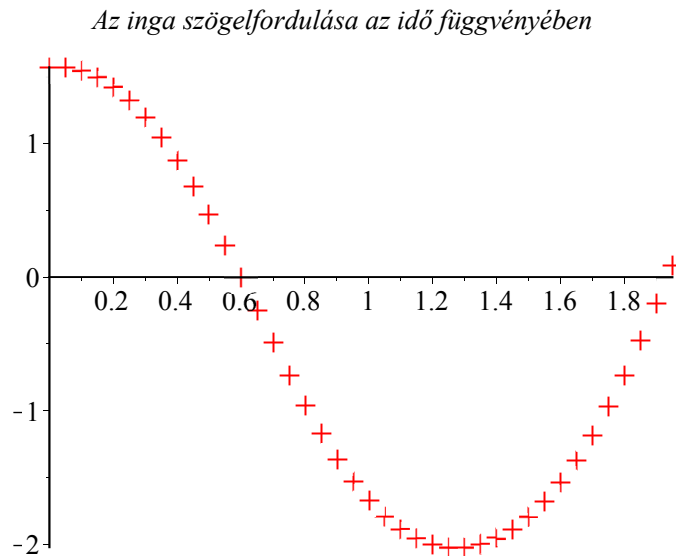
$\omega[i] := \omega[i-1] - h \cdot 10 \sin(\varphi[i-1])$

end do;

> *T := [seq(t[i], i=0..n)] : $\Phi := [seq(\varphi[i], i=0..n)] :$*

> *pontok := plot* $\left(\left[\text{seq} \left(\left[T_i, \Phi_i \right], i=1..n \right) \right], \text{style} = \text{point}, \text{symbolsize} = 20, \text{symbol} = \text{cross}, \text{color} \right)$

= red, title = Az inga szögelfordulása az idő függvényében) : pontok

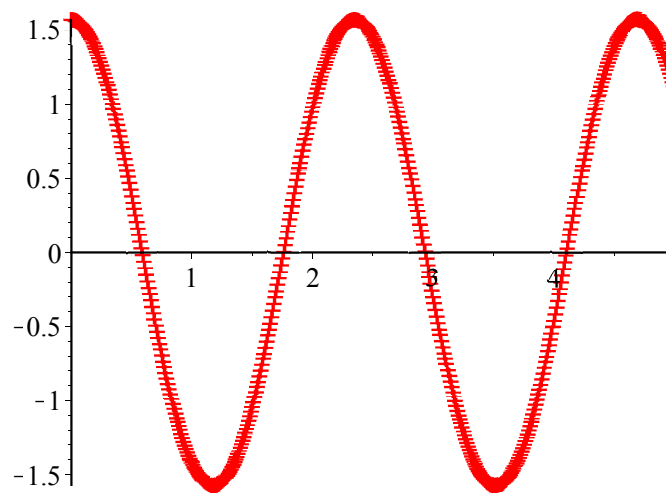


Az ábrán megfigyelhető, hogy a tömegpont a szélső helyzetben lassabban halad át, míg az egyensúlyi helyzetet gyorsan elhagyja.

b2; Megoldás a beépített numerikus eljárással

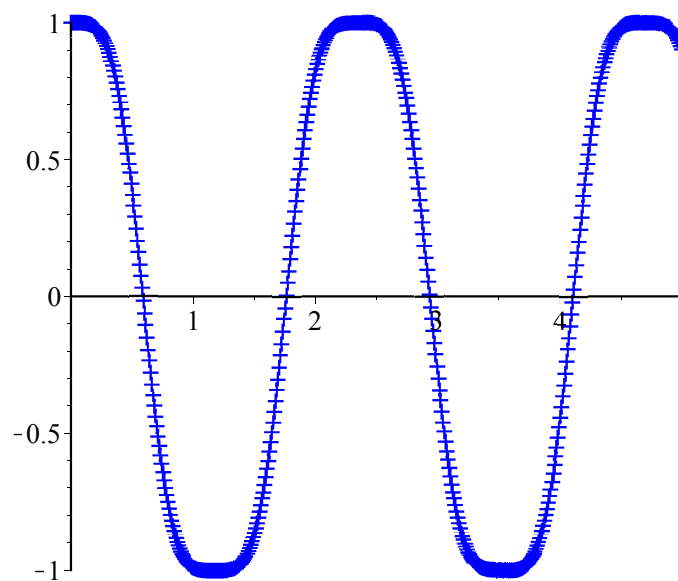
```
> restart; with(DETools) : with(plots) : de :=  $\frac{d^2}{dt^2} \varphi(t) = -10 \cdot \sin(\varphi(t))$  :
> partmegold := dsolve( $\left\{ de, \varphi(0) = \frac{\pi}{2}, D(\varphi)(0) = 0 \right\}, \varphi(t), numeric$ );
      partmegold := proc(x_rkf45) ... end proc
> T := [seq(rhs(partmegold(0.01·i)[1]), i = 0..500)] :
> phi := [seq(rhs(partmegold(0.01·i)[2]), i = 0..500)] :
> szog := plot([seq([T[i], phi[i]], i = 1..500)], style = point, symbolsize = 15, symbol = cross,
      color = red, title = 'Szögelfordulás - idő függvény') : szog
```

Szögelfordulás – időfüggvény

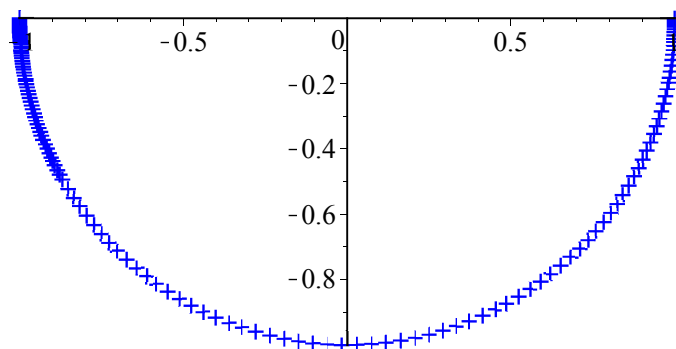


```
> kiteres := plot( [ seq( [ T[i], sin(ϕ[i]) ], i = 1 .. 500 ) ], style = point, symbolsize = 15, symbol
= cross, color = blue, title = 'Vízszintes kitérés - időfüggvény') : kiteres
```

Kiteres – időfüggvény



```
> mozgas := plot( [ seq( [ sin(ϕ[i]), -cos(ϕ[i]) ], i = 1 .. 150 ) ], style = point, symbolsize
= 15, symbol = cross, title = 'Ingamozgás x – y koordinátái', color = blue, scaling
= constrained ) : mozgas
```



A mozgás animációval:

```
> for i to 500 do
    abra[i] := pointplot( [ sin(φ[i]), -cos(φ[i]) ], style=point, symbolsize=15, symbol
        =soliddiamond, color=blue) :
od:
> display( [seq(abra[i], i=1..120) ], title='Ingamozgás animáció', scaling=constrained,
    insequence=false)
```

▼ 11. 3. Peremérték-feladat megoldása a véges differenciák módszerével

Először tekintsük az

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = r(x) \\ y(a) = A, y(b) = B$$

lineáris peremértékfeladatot. Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot n egyenlő részre, h legyen az osztópontok távolsága, az i -edik osztáspont legyen x_i , $i=0 \dots n$, legyen $y_i = y(x_i)$, $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $r_i = r(x_i)$.

Használjuk fel a numerikus deriválásnál a 9. fejezetben megismert **centrális differencia formulákat**.

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \\ y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}, \quad i = 1 \dots (n-1)$$

A peremfeltételek alapján $y(a) = y_0 = A$, $y(b) = y_n = B$. Írjuk fel a differenciálegyenletet a közelítő formulák felhasználásával minden x_i , $i = 1 \dots (n-1)$ pontra

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \cdot \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i \cdot y_i = r_i.$$

Szorozva h^2 -tel és rendezve kapjuk, hogy

$$y_{i+1} \cdot (2 + h \cdot p_i) + y_i \cdot (2 \cdot h^2 \cdot q_i - 4) + y_{i-1} \cdot (2 - h \cdot p_i) = 2 \cdot h^2 \cdot r_i \quad i = 1 \dots (n-1).$$

Ez pedig $(n-1)$ egyenletből álló lineáris egyenletrendszer az $(n-1)$ darab y értékre. Ennek az egyenletrendszernek a megoldása adja a differenciálegyenlet megoldásfüggvényeinek közelítő értékét. Az egyenletrendszer együtthatómátrixa ún. tridiagonális, mert csak a főátlóban, illetve attól eggyel jobbra és balra tartalmaz elemeket.

3. Példa Oldjuk meg a véges differenciák módszerével az $y'' - y = x$ $y(0) = 1$, $y(1) = 3$

Megoldás

> *restart; with(DEtools) : with(plots) :*

>
$$de := \frac{d^2}{dx^2} y(x) - y(x) = x :$$

A differenciálegyenletnek létezik egzakt megoldása

> *part_mo := dsolve({de, y(0) = 1, y(1) = 3}, y(x))*

$$part_mo := y(x) = \frac{e^x (-4 + e^{-1})}{-e + e^{-1}} - \frac{e^{-x} (e - 4)}{-e + e^{-1}} - x$$

> *abra := plot(rhs(part_mo), x = 0..1, color = red) :*

>
$$formula := (-4 + 2 q_i h^2) y_i + (2 - p_i h) y_{i-1} + (p_i h + 2) y_{i+1} = 2 h^2 r_i :$$

A véges differencia módszer alkalmazásához definiáljuk a $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ függvényeket.

>
$$p := x \rightarrow 0 : q := x \rightarrow -1 : r := x \rightarrow x :$$

Vagyis a formulában

> *formula := subs({q_i = -1, p_i = 0, r_i = x_i}, formula)*

$$formula := (-4 - 2 h^2) y_i + 2 y_{i-1} + 2 y_{i+1} = 2 h^2 x_i$$

Írjunk ciklust, ami előállítja az egyenletrendszert, majd a lineáris algebra eszközeivel oldjuk is meg.

> $y[0] := 1 : y[20] := 3 : h := 0.05 : x[0] := 0 :$

> **for** i **to** 19 **do**

$x[i] := x[i-1] + i h;$

$e[i] := (-4 - 2 h^2) y[i] + 2 y[i-1] + 2 y[i+1] = 2 h^2 x[i]$

end do :

> *rendszer := seq(e[i], i = 1..19) :*

Generáljuk az együtthatómátrixot, és a konstansok mátrixát, majd az inverzmátrix képzésének segítségével oldjuk meg a rendszert.

> *with(LinearAlgebra) : A, b := GenerateMatrix([rendszer], [seq(y[i], i = 1..19)]) :*

> $X := [seq(h \cdot i, i = 1..19)] ; Y := convert(MatrixInverse(A).b, list);$

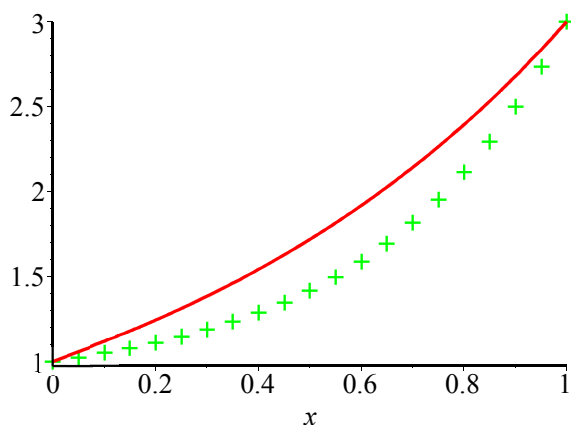
$X := [0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40, 0.45, 0.50, 0.55, 0.60, 0.65, 0.70, 0.75, 0.80, 0.85, 0.90, 0.95]$

$Y := [1.02298113602104, 1.04864472488213, 1.07730492555543, 1.10940838854261, 1.14553537250115, 1.18640119489095, 1.23285802026797, 1.28589699069566, 1.34665070360009, 1.41639604326352, 1.49655737303511, 1.58871009623929,$

1.69458459468407, 1.81607055461555, 1.95522169093358, 2.11426088147894,
2.29558572422799, 2.50177453128762, 2.73559277467547]

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az egzakt és a numerikus megoldást.

```
> a := plot( [seq( [Xi, Yi], i = 1 .. 19) ], style = point, symbolsize = 20, symbol = cross, color = green) :
c := plot( [ [0, 1], [1, 3] ], style = point, symbolsize = 20, symbol = cross, color = green) :
> plots[display]( [a, c, abra] )
```



Látjuk, hogy a módszer elég nagy hibával dolgozik.

A Maple *dsolve, numeric* opciójában létezik beépített *method = bvp* (boundary value problem: peremérték-feladat) lehetőség. Oldjuk meg az egyenletet ennek segítségével is, majd hasonlítsuk össze a kapott eredményeket.

```
> unassign('y'); unassign('x'); de2 :=  $\frac{d^2}{dx^2}y(x) - y(x) = x$  :
partmegold := dsolve( {de2, y(0) = 1, y(1) = 3}, y(x), numeric, method = bvp, range = 0 .. 1 )
partmegold := proc(x_bvp) ... end proc
```

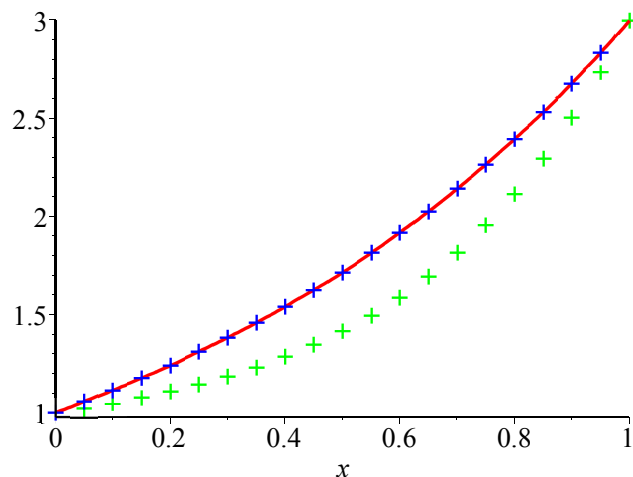
Innen tetszőleges helyen kiolvashatjuk a megoldásfüggvény értékét.

```
> partmegold(0.3)
```

$\left[x = 0.3, y(x) = 1.38197997628093, \frac{d}{dx} y(x) = 1.48994390520282 \right]$

Olvassuk ki a megoldásfüggvény értékeit h lépésközönként.

```
> x0 := 0 : y0 := 1 : h := 0.05 :
for i to 20 do xi := xi-1 + h; yi := rhs( partmegold(xi)) end do :
> X2 := [seq( x[i], i = 0 .. 20) ] : Y2 := [seq( y[i], i = 0 .. 20) ] :
> d := plot( [seq( [X2i, Y2i], i = 1 .. 20) ], style = point, symbolsize = 20, symbol = cross, color = blue) :
> plots[display]( [a, c, abra, d] )
```



Az ábrán kék szín jelenti a *bvp* opcióval kapott értékeket. A beépített algoritmusok közül a Maple a legkisebb hibával dolgozót választja ki, ezek tárgyalása meghaladja e jegyzet kereteit.

Megjegyzés: Nem lineáris feladat megoldása természetesen nem lineáris egyenletrendszerhez vezet, ennek megoldhatósága a nemlineáris algebra eszköztárával lehetséges.

4. Példa Oldjuk meg az alábbi nem lineáris peremérték-feladatot a Maple beépített numerikus eljárásával, az adott intervallum 10 egyenlő részre osztásával. Adjuk meg a megoldás értékét az $x=1.2$ helyen.

$$y'' = y^2, \quad y(1) = \sqrt{2}, \quad y(2) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Megoldás

> *restart; with(plots) : with(DEtools) : de := $\frac{d^2}{dx^2} y(x) = y(x)^2$:*

> *partmegold := dsolve($\left\{ de, y(1) = \sqrt{2}, y(2) = \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}, y(x), numeric, method = bvp, range = 1..2$) :*

A függvény értéke a keresett helyen:

> *partmegold(1.2)*

$$\left[x = 1.2, y(x) = 1.18495281041647, \frac{d}{dx} y(x) = -0.988311159455787 \right]$$

Az $[1, 2]$ intervallumban a keresett függvényértékek listába rendezve:

> $x_0 := 1 : y_0 := \sqrt{2} : h := 0.1 :$

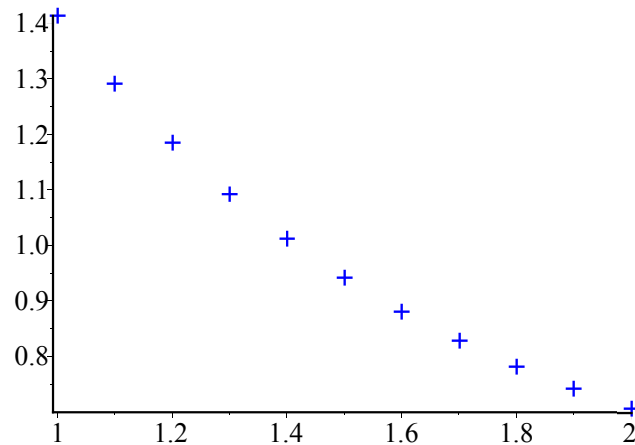
for i **to** 10 **do** $x_i := x_{i-1} + h; y_i := rhs(partmegold(x_i)_2)$ **end do** :

> $X := [seq(x[i], i = 0..10)]; Y := [seq(y[i], i = 0..10)]$

$X := [1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2.0]$

$Y := [\sqrt{2}, 1.29121808387020, 1.18495281041647, 1.09277279772872, 1.01256843427180, 0.942643710882498, 0.881625863306956, 0.828397517422350, 0.782045204711264, 0.741819935887751, 0.707106781186550]$

> `plot([seq([Xi, Yi], i = 1 .. 11)], style = point, symbolsize = 20, symbol = cross, color = blue)`



▼ 11. 4. Feladatok

1. Feladat Oldja meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat

a; $y'' = -y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

b; $y'' + xy = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = c$,

határozzuk meg c értékét, hogy $y(1.2) = y'(1.2)$ három jegy pontossággal teljesüljön.

2. Feladat Oldja meg az alábbi peremérték-feladatokat a véges differencia módszerével.

a; $y'' = xy$ $y(0) = y(1) = 1$

b; $y'' = -\frac{\cos x}{(\sin x + 1)^2}$ $y(0) = y(1) = 1$

c; $3y y'' + (y')^2 = 0$ $y(1) = 1$, $y(2) = 3$

d; $y'' = y + \sin y$ $y(0) = 0$, $y(1) = 1$

▼ 11. 5. Ellenőrző kérdések

1. Mi a különbség a kezdetiérték és a peremérték feladat között?
2. Adja meg a kezdetiérték probléma Euler módszeres megoldásának lépéseit.
3. Vezesse le a lineáris peremérték feladat formuláját.